



Cours de zététique

Probabilités

Sébastien Paumier



Définition

- probabilité d'un évènement X = chances que *cet évènement* se produise parmi tous les évènements possibles
- représentée par un nombre entre 0 (n'arrive jamais) et 1 (certain)
- la somme des probabilités doit faire 1
- exemple: pour un dé normal, chaque face a une probabilité de sortir de $1/6$



Bien modéliser le problème

- pour un dé, on néglige certains facteurs:
 - dé qui reste en équilibre sur une arête
 - dé qui casse
 - dé avalé par le chat
 - etc.
- aucun modèle ne colle parfaitement à la réalité
- on se contente d'un modèle raisonnable



Loi des grands nombres

- si on fait suffisamment d'observations, les statistiques tendent vers les probabilités théoriques
- 100, 10000, 1000000 lancers de dé (prob. théorique = $1/6 = 0,166666\dots$):

Valeur	Nombre d'apparition	Fréquence
1	12	0,12
2	16	0,16
3	16	0,16
4	17	0,17
5	18	0,18
6	21	0,21

Valeur	Nombre d'apparition	Fréquence
1	1642	0,164
2	1566	0,157
3	1686	0,169
4	1683	0,168
5	1726	0,173
6	1697	0,170

Valeur	Nombre d'apparition	Fréquence
1	167001	0,167
2	167100	0,167
3	166636	0,167
4	166197	0,166
5	166544	0,167
6	166522	0,167



Ensemble des possibles

- pour calculer la probabilité de X, il faut connaître l'ensemble des possibles
- attention à ne pas confondre probabilité mathématique et probabilité intuitive:
 - "il est peu probable que je mange de la raclette au Népal" => pas quantifiable
 - "il est peu probable qu'une météorite tombe sur une ville": calcul possible en tenant compte de facteurs mesurables (nombre de météorites atteignant la surface de la terre, proportion de villes sur cette surface, etc)



Calculabilité

- dans certains cas, c'est calculable malgré une intuition contraire:
 - je pense à mon cousin Athanase à 6h04
 - le téléphone sonne à 6h08
 - on m'informe du décès de mon cousin
- preuve de l'existence des prémonitions ?



Calculabilité

- formalisation du problème:
 - quelle est la probabilité pour que, ayant pensé à quelqu'un, on apprenne son décès dans les 5 minutes qui suivent ?
- estimation (très faible) n°1:
 - on connaît (au sens large) 10 personnes qui vont mourir dans l'année
- estimation (toujours très faible) n°2:
 - on ne pense qu'une fois par an à chacune de ces 10 personnes



Calculabilité

- combien d'intervalles de 5 minutes dans 1 an ?

$$365 \times 24 \times 60 / 5 = 105120 \text{ intervalles}$$

- probabilité d'apprendre la mort d'une personne précise moins de 5 minutes après y avoir pensé:

$$p = 1/105120$$

- comme il y a 10 personnes, on a une probabilité globale de:

$$p = 1/10512$$



Calculabilité

- $p=1/10512$ est faible, mais:
 - nos estimations sont très faibles
 - la population est grande:
 $p \times 60 \text{ millions} \approx 5700 \text{ personnes}$
- si, chaque année, 5700 personnes ont cette expérience et le font savoir à leur entourage, qui le répète, etc, on a néanmoins l'impression d'un phénomène courant
- c'est vrai, mais c'est dû au hasard!



Paranormal vs hasard

- autre exemple de biais dû à un faux infime: les ampoules d'Uri Geller

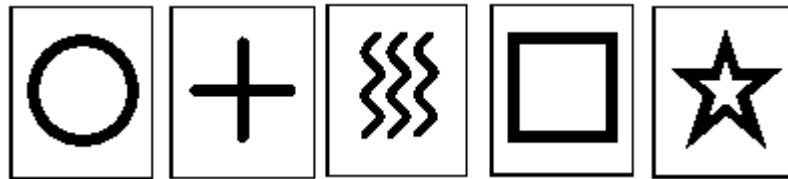


- rien d'étonnant si l'on tient compte:
 - du nombre de téléspectateurs
 - de la durée du show
 - de la durée de vie d'une ampoule



Biais de publication

- tests aux cartes Zener de Rhine



- si 1 chance sur 1000, mais que l'expérience est effectuée 10000 fois, il y aura environ 10 sujets "doués"
- seules ces expériences seront publiées!



Biais de publication

- prédiction du résultat des élections:
 - enveloppe déposée chez un huissier avec la prédiction
 - ouverture par l'huissier en direct
 - INCROYABLE: classement exact du premier tour!
- les sceptiques seront bien obligés d'admettre l'évidence cette fois
- sauf si...



Biais de publication

- rappel: pour calculer une probabilité, il faut connaître l'ensemble des possibles
- or: rien ne dit qu'il n'y avait qu'une seule prédiction chez un seul huissier
- on est sûr de gagner si on joue toutes les combinaisons!



La règle d'or

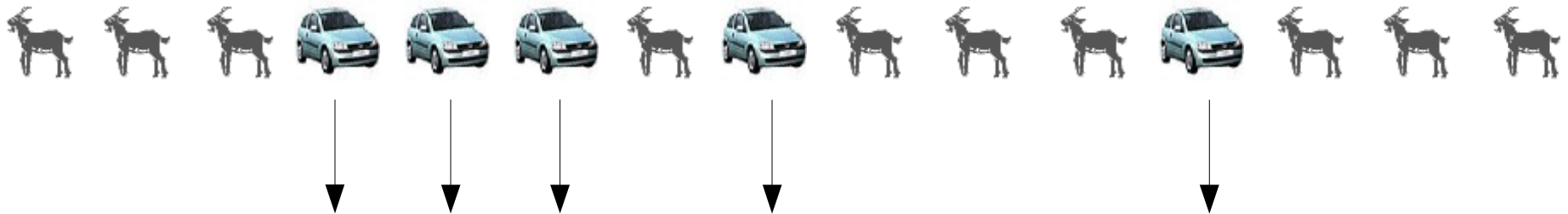
- le cerveau humain n'est pas câblé pour comprendre les probabilités!
- ne jamaïs se fier à son intuition dans ce domaine
- exemple: les trois rideaux





Les trois rideaux

- si on maintient son choix de départ, on garde la probabilité de gagner de $1/3$
- exemple pour 15 essais:

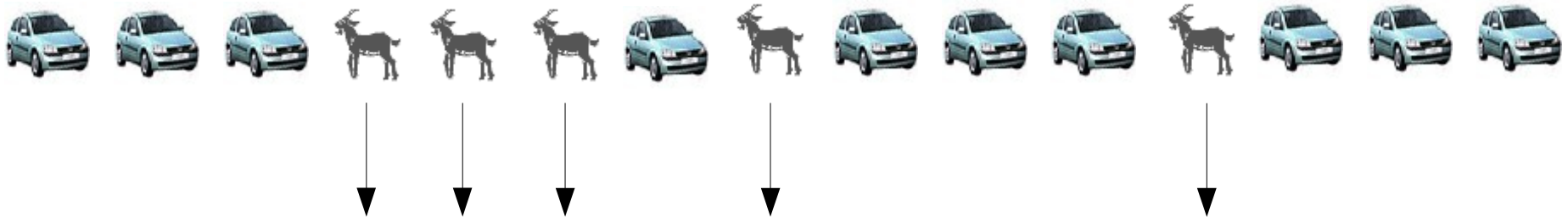


1 chance sur 3 de gagner la voiture



Les trois rideaux

- si on change de rideau, comme il n'y a que 2 choix, tous les choix gagnants deviennent perdants et inversement:
- exemple pour 15 essais:

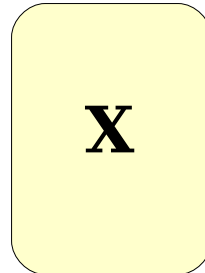


1 chance sur 3 de perdre
⇒ 2 chances sur 3 de gagner la voiture!



Variante

- 3 cartes: **X/X**, **X/O** et **O/O**
- vous tirez une carte et la mettez sur la table:

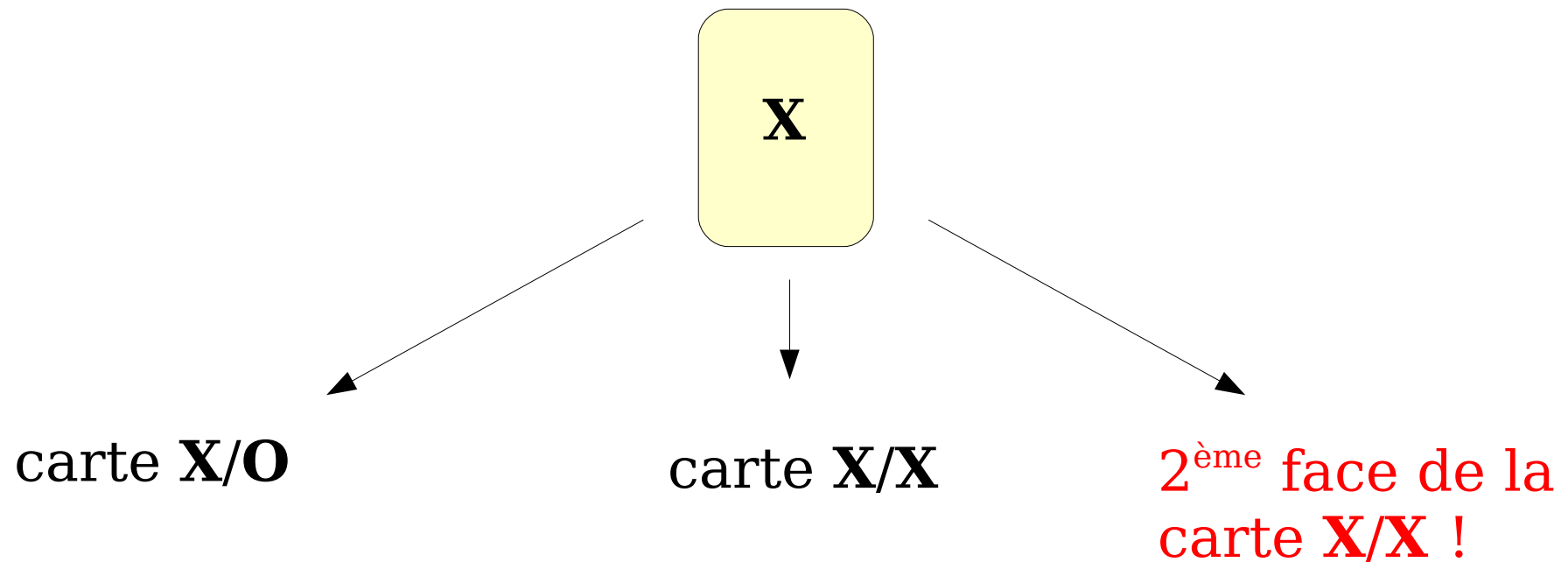


- le banquier parie à 2 contre 1 qu'il y a une croix de l'autre côté:
"ça ne peut pas être la **O/O**, c'est donc une des 2 autres"



Variante

- pourquoi perdez-vous s'il y a 1 chance sur 2 ?
- parce qu'il n'y a qu'une chance sur 3:





Les anniversaires

- soit 30 personnes dans une salle
- quelle est la probabilité que 2 personnes au moins aient la même date d'anniversaire ?
- intuitivement, c'est peu probable
- mais...



Les anniversaires

- calculons la probabilité que chacun ait une date unique:
 - 365 possibilités pour le 1^{er}
 - 364 pour le second
 - etc.
- au total: $365 \times 364 \times \dots \times (365 - 30)$
- si l'on divise par l'ensemble des possibles 365^{30} , on obtient $\approx 0,29$



Les anniversaires

- or, si 0,29 est la probabilité que chacun ait une date unique, la probabilité que 2 personnes au moins aient la même date est de $1 - 0,29 = 71\%$
- formule générale:

$$p(n) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!} * \frac{1}{365^n}$$

- pour 50 personnes, $p = \underline{97\%}$!



Comment gagner gros au loto

- équiprobabilité des combinaisons:
1 2 3 4 5 6 est aussi probable que n'importe quelle autre grille
- illusion de maîtrise du hasard avec des grilles ayant une signification pour le joueur (date de naissance, immatriculation, etc)
- seul le nombre de grilles jouées a une influence sur les chances de gain, mais...



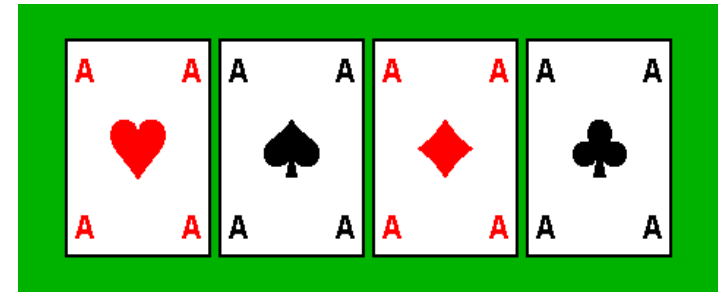
Comment gagner gros au loto

- les grilles "significatives" sont plus jouées:
 - à cause des dates, les nombres entre 1 et 12 et 1 et 31 seront surreprésentés
- conclusion:
 - en tirant vraiment au hasard (grille flash), on n'a pas plus de chances de gagner
 - MAIS: si on gagne, on a moins de chances d'avoir à partager...



Équiprobabilité

- équiprobabilité théorique \neq distribution pratique:
 - considérations psychologiques
 - cas du Tapis Vert



- équiprobabilité réelle ?
 - aux courses, l'état des chevaux compte



Comment gagner à la roulette

- sophisme du joueur:
"si le rouge est sorti 7 fois de suite, le noir est plus probable au prochain coup"
- FAUX!
- ce jeu n'a pas de mémoire: probabilités identiques à chaque coup
- solution: ouvrir un casino :)



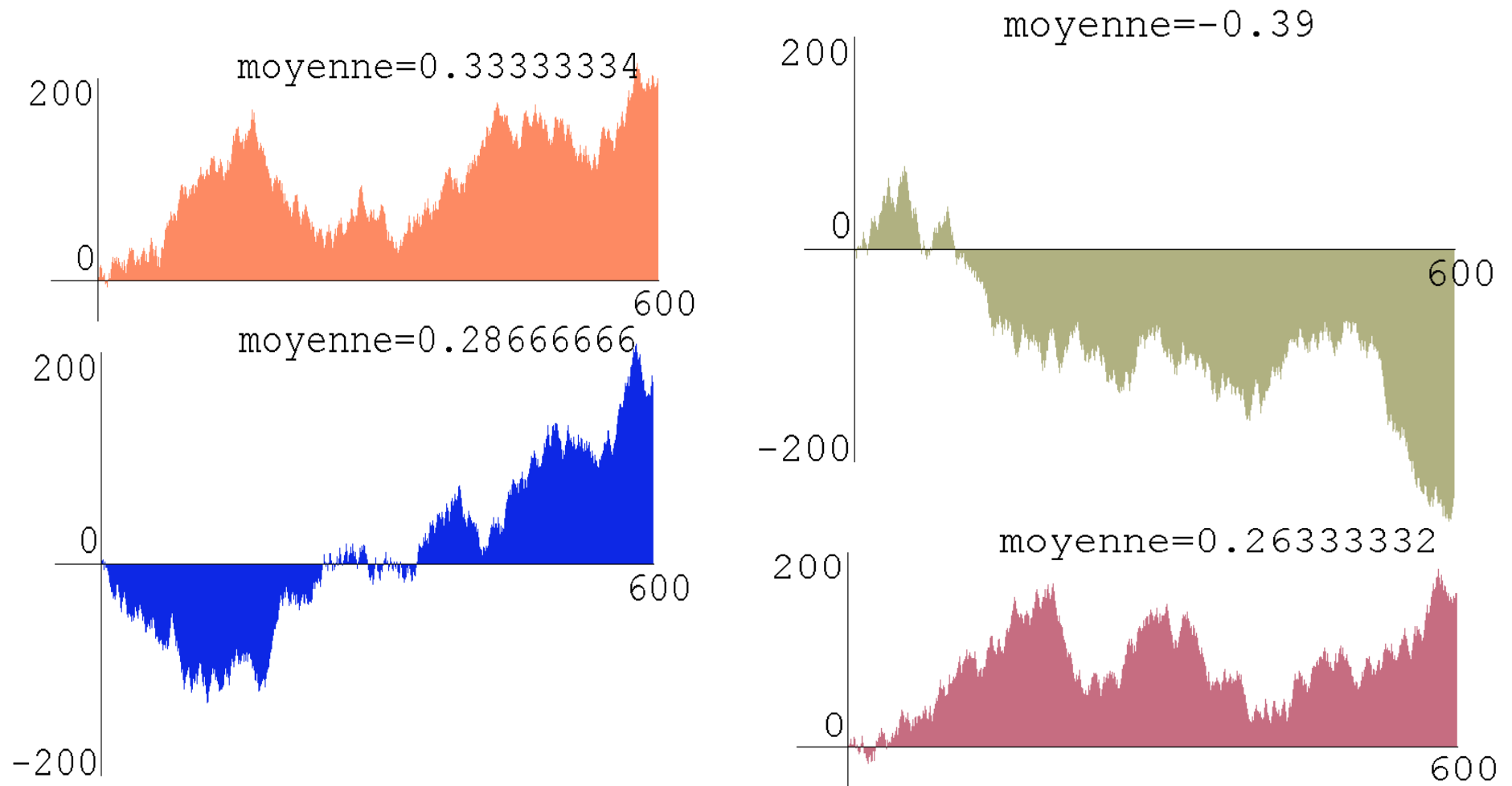
Mouvement brownien

- tirage équiprobable de n entre -10 et 10
- vers quoi tend la somme des n quand on fait beaucoup de tirages ?
- exemple: n représente la fluctuation d'une action
- votre intuition vous souffle 0 ?



Mouvement brownien

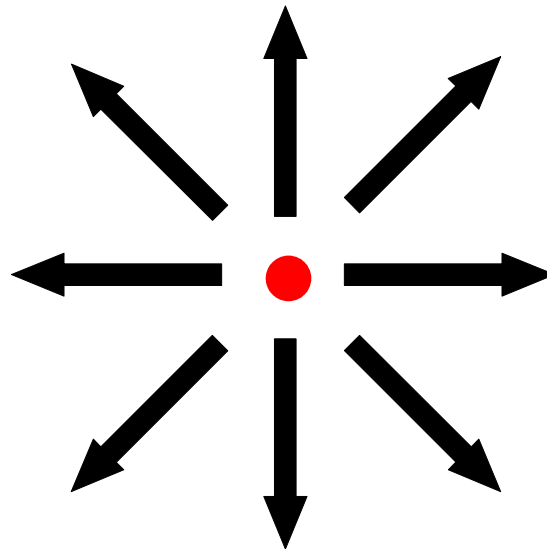
- c'est $\sum n / \text{nombre de tirages}$ qui tend vers 0!





Mouvement brownien

- même chose en 2 dimensions
- on tire aléatoirement un déplacement:

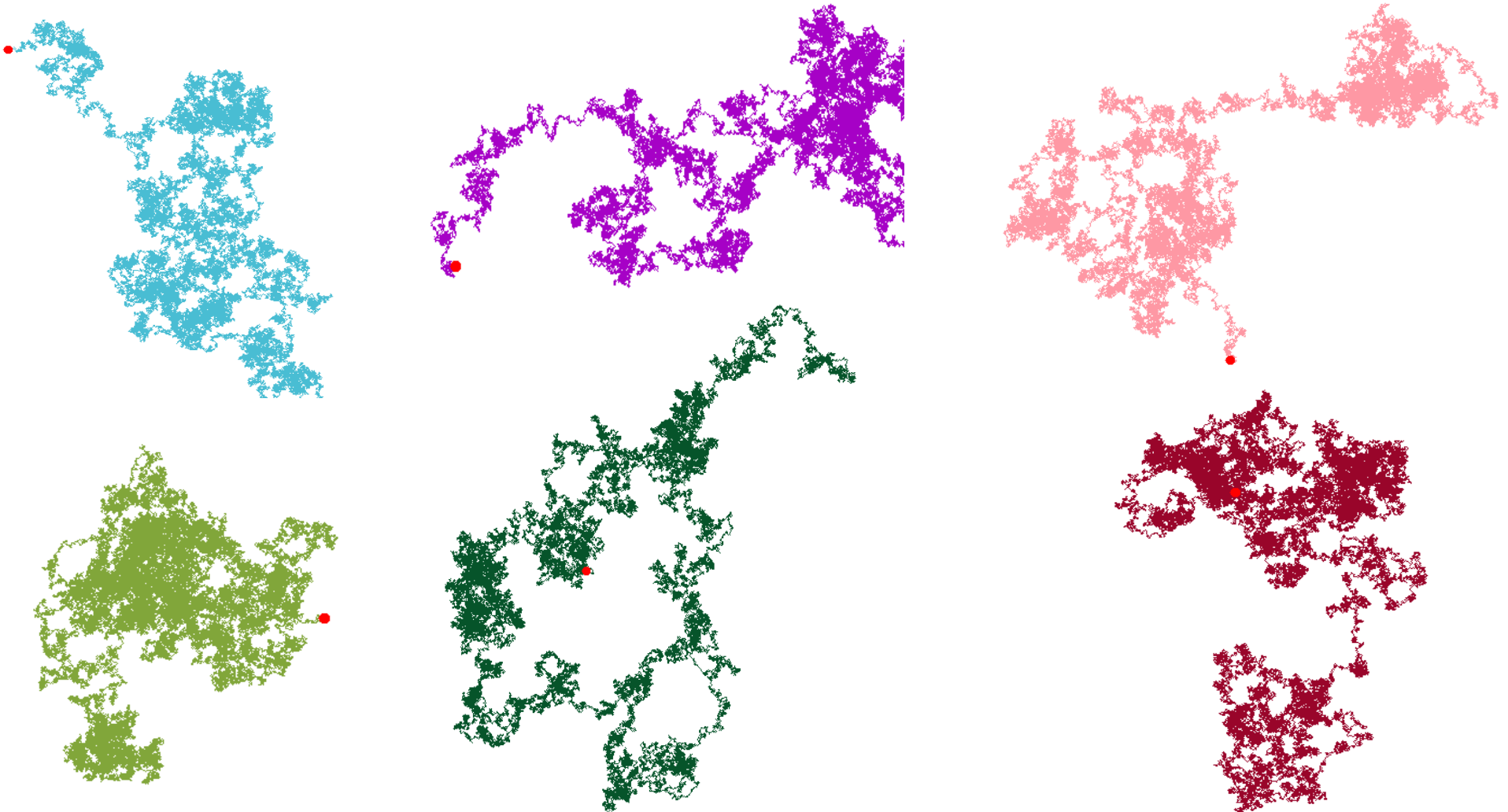


- où va le point au bout de N tirages ?



Mouvement brownien

- le point de départ n'est pas au centre !





Probabilité de l'improbable

- INCROYABLE: cette semaine j'ai eu 4 fois la fève sur des galettes de 8 personnes, je devrais jouer au loto
- oui, mais: n'importe quel type d'événement aurait pu attirer mon attention:
 - recevoir une facture de 111,11€
 - trouver un billet dans la rue
 - voir un nuage qui ressemble à Elvis



Probabilité de l'improbable

- un événement improbable est improbable
- qu'un événement improbable (n'importe lequel) se produise est probable
- se méfier: l'événement X qui s'est produit était-il précisément prédit ?



Probabilités a posteriori

- essayez de faire croire au gagnant du loto qu'il n'aurait pas dû jouer...
- la grille gagnante était improbable, mais elle est sortie quand même
- les probabilités n'ont de sens qu'avant l'événement!



Principe anthropique

- considérer la probabilité d'un événement a posteriori en le ramenant à l'homme:

"Parmi l'infinité des univers qui étaient possibles, la vie est apparue grâce à une série de hasards trop importante pour que ce soit une coïncidence"



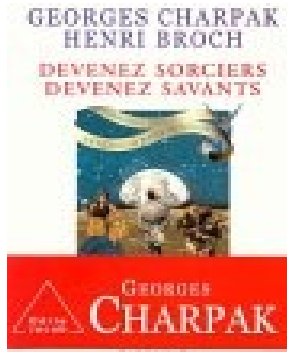
Ce que prouve ma vie

- si:
 - mon grand-père n'avait pas raté le train
 - il n'aurait pas pris un café
 - ne se serait pas étouffé avec son croissant
 - n'aurait pas rencontré une jolie secouriste
 - ...
 - ...
- je ne serais pas là aujourd'hui! C'est vraiment incroyable!

"Le hasard fait bien les choses ? T'as pas dû être fait par hasard toi." (Coluche)



Bibliographie



Devenez sorciers, devenez savants
Georges Charpak, Henri Broch



Le Paranormal
Henri Broch



Au cœur de l'extra-ordinaire
Henri Broch

+ bibliographie du cours précédent